

離散選択モデルの発展と今後の課題

Development of Discrete Choice Models and Future Tasks

山 本 俊 行*

1. はじめに

大学の授業などで、多項ロジット (MNL) モデルで重要な IIA 特性，すなわち，2つの選択肢の選択確率の比は，その選択肢の確定効用のみに影響を受け，選択肢集合に含まれる他の選択肢の影響を受けない，という「無関係な選択肢からの選択確率の独立性」に関して説明し，その短所について例示する際，「赤バス-青バス問題」が良く用いられる。ご存知の通り，「赤バス-青バス問題」とは，以下の問題である (北村他 2002)。

効用の確定項の値が全く同じ車とバスが選択肢集合にある場合，両者の選択確率の比は1となり，もしその2つしか選択肢集合になければ，選択確率はそれぞれ1/2になる。ここで，そのバスの車体は赤色に塗られている (赤バス)。次に，赤バスと全く同じ属性を持つが，車体が青色に塗られているバス (青バス) が導入される。車体の色は効用に影響しないとすると，車と2種類のバスの効用の確定項の値は全て同じとなり，全ての選択肢ペアの選択確率の比は1になる。もしその3つしか選択肢集合になければ，選択確率はそれぞれ1/3になる。すなわち，青バスの導入によって，バスの選択確率は1/2から2/3に増えることになる。このような結果は直感には合わず，車，赤バス，青バスの選択確率がそれぞれ1/2，1/4，1/4となると考えるのが自然である。

さて，通常，「赤バス-青バス問題」を話した後は，ネスティッドロジット (NL) モデルの説明

をするのだが，現在では，赤バス，青バスに加えて，緑小型バスや紫タクシー，黄カーシェアなど様々な色や属性を持つ選択肢が存在したとしても，それらを表現可能な様々なモデルが開発されている。本稿では，これまでに開発されてきた離散選択モデルの特徴を整理し，今後の課題について考えてみたい。

2. 選択肢間の相関の表現

2.1 オープンフォームとクローズドフォーム

離散選択モデルは選択肢の効用が選択肢の属性や意思決定者の属性等で表される確定項と，ある特定の確率分布を仮定した確率項の和で表される。ここで，確率項は，確定項に含まれなかった属性や確定項の関数形の誤差，属性の観測誤差など様々な要因が含まれる。したがって多くの要因の和の分布としては，中心極限定理により，確率項を正規分布で表すのが自然である。しかしながら，確率項に正規分布を仮定した多項プロビット (MNP) モデルは選択確率を表す式に積分形が残るオープンフォームであるため，計算負荷が高い。そのため，積分形のないクローズドフォームを導く分布形として，確率項にガンベル分布を仮定した MNL モデルが多用されている。

計算負荷の問題は計算機の性能の向上により大幅に改善され，現在では選択肢が3，4個程度なら MNP モデルも問題なく推定可能である。ただし，計算機の性能に任せてより複雑なモデルの推定が試みられるようになっており，後述するような問

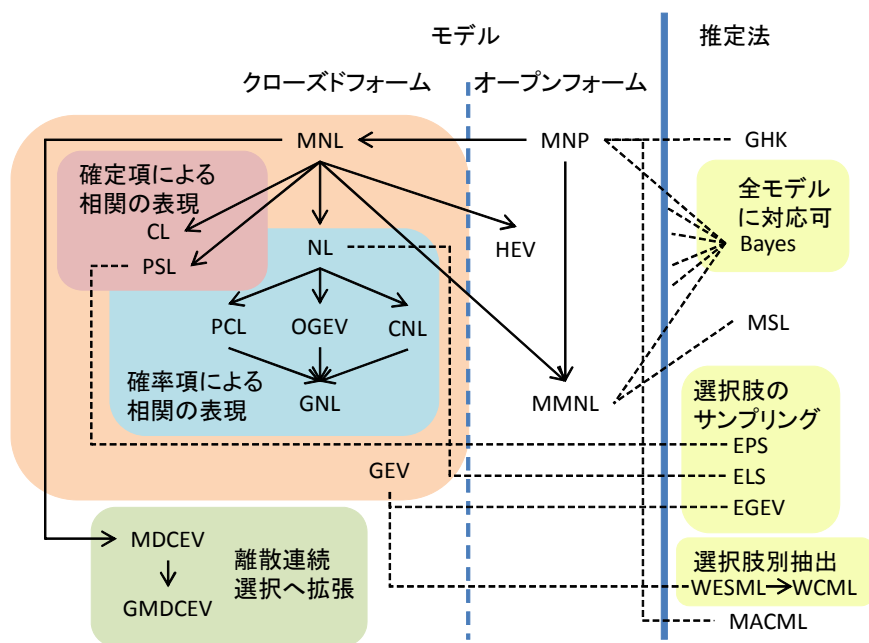
* 正 会 員 名古屋大学エコトピア科学研究所教授 (TEL: 052-789-4636, FAX: 052-789-5728, e-mail: yamamoto@civil.nagoya-u.ac.jp)

題が生じている。

2.2 GEV モデルの発展

MNL モデルは計算負荷が非常に低く、実用的な

モデルであるが、前述の通り IIA 特性の問題がある。選択肢間の相関を表現するため、NL モデルを始め、MNL モデルを拡張する形で様々なモデル



モデル・推定法	出典 (必ずしも初出ではない)
Bayes 推定	Albert and Chib (1993)
CL (C-logit)モデル	Cascetta et al. (1996)
CNL (cross-nested logit)モデル	Vovsha (1997)
EGEV (Expansion for GEV)推定	Guevara and Ben-Akiva (2010)
ELS (expanded logsum)推定	Lee and Waddell (2010)
EPS (expanded path-size)推定	Frejinger et al. (2009)
GEV (generalized extreme value)モデル	McFadden (1978)
GMDCEV (generalized multiple discrete-continuous extreme value)モデル	Bhat and Pinjari (2010)
GNL (generalized nested logit)モデル	Wen and Koppelman (2000)
HEV (heteroscedastic extreme value)モデル	Bhat (1995)
MACML (maximum approximate composite marginal likelihood)推定	Bhat (2011)
MDCEV (multiple discrete-continuous extreme value)モデル	Bhat (2005)
MNL (multinomial logit)モデル	Luce (1959)
MNP (multinomial probit)モデル	Thurstone (1927)
MSL (maximum simulated likelihood)推定	Gourieroux and Monfort (1993)
MXL (mixed logit)モデル	McFadden and Train (2000)
NL (nested logit)モデル	Ben-Akiva (1973), McFadden (1978)
OGEV (ordered generalized extreme value)モデル	Small (1987)
PCL (paired combinatorial logit)モデル	Chu (1981, 1989)
PSL (Path-size logit)モデル	Ben-Akiva and Bierlaire (1999)
WCML (weighted conditional maximum likelihood)推定	Bierlaire et al. (2008)
WESML (weighted exogenous sample maximum likelihood)推定	Manski and Lerman (1977)

図-1 離散選択モデルと推定法の系譜

が開発されている。

NL モデルは IIA 特性を緩和したモデルの中で最も良く用いられるモデルである。選択肢集合はいくつかの集合に分割され，集合内の選択肢の確率項間の相関を表現することが可能で，集合内でさらに部分的な集合を設定することも可能である。ただし，集合は相互に交わりを持たないか，包含関係にある必要がある。

NL モデルはツリー構造で表されることが多いが，この表現が選択の順序を表すものとの誤解を生むこともある。例えば，「赤バス-青バス問題」の場合，赤バスと青バスとの間に相関を仮定することが多いが，そのことは，まず車かバスかを選んでから赤バスか青バスを選ぶという選択順序を意味しない。選択順序の先入観があると，想定するツリー構造が限定的になり，データに適した本当のツリー構造を同定することが出来ない可能性がある。確率項には様々な要因が含まれるため，データの取得方法等によっては思いもよらない選択肢間の相関が卓越することも考えられる。

NL モデルで表現可能な確率項の相関は限定的であるため，より柔軟な相関関係を考慮可能なモデルとして，PCL モデル，OGEV モデル，CNL モデル（略号については図-1 を参照されたい。以降も同様）などのモデルが開発されている。これらのモデルはそれぞれ特定の相関関係について，NL モデルを拡張したものとなっている。そして，それらをより一般化したものとして，GNL モデルが開発されている。

GNL モデルは非常に柔軟な相関構造を表現可能であるが，その分，パラメータが多いため，推定にあたり，どのパラメータを共通にすべきか，1 や 0 に固定にすべきか等，有意な結果を得るためには慎重な姿勢が必要である。必要以上に自由度を高くすると，推定時の収束計算が収束しなかったり，収束したとしても推定結果の解釈が困難となる場合もある。

以上のモデルは確率項により選択肢間の相関を表現したものであるが，MNL モデルの簡潔さを保ちつつ選択肢間の相関を表現しようとしたモデルとして CL モデルや PSL モデルが開発されてい

る。これらのモデルでは，選択肢間の類似度を表す変数を定義し，確定項に加えることで選択肢間の相関を表現している。これらのモデルは経路選択で適用されており，経路の重複率により選択肢間の類似度を表している。

MNL モデルから始まり，CL モデルや PSL モデルを含め，GNL モデルまで，いずれのモデルも確率項はガンベル分布を用いており，それらを総称して GEV モデルと呼ばれる。GEV モデルの概念そのものはより一般的であり，今後も GEV モデルの範疇で新たなモデルが提案される可能性もある。従来は，提案するモデルが GEV モデルの概念を満たしているか複雑な証明が必要であったが，現在では，選択肢間の相関構造をネットワーク構造で表現し，再帰型の NL モデルでモデル化することで，複雑な証明なしに新しい GEV モデルを開発する方法（network GEV モデル）が提案されている（Daly & Bierlaire 2006）。

これらの GEV モデルはクローズドフォームであり，複雑なモデルになるほど非線形性が強いものの，数値積分を必要としないため，オープンフォームのモデルに比べると計算負荷が少ないという利点がある。したがって，利用可能な GEV モデルが存在する場合には，後述する MMNL モデルではなく GEV モデルを使用すべきであろう。

2.3 異分散性の考慮

MNP モデルは確率項の大きさに制約はなく，選択肢毎の確率項の大きさは自由である一方，これまで見てきた GEV モデルは全て確率項の大きさが選択肢間で同一であることを仮定している。それに対して，ガンベル分布を仮定したモデルでも，選択肢間で確率項の大きさが異なることを仮定した HEV モデルが開発されている。ただし，HEV モデルはオープンフォームであるため，MNP モデルと同様に数値積分が必要となり，計算上の有利さは失われている。それ以上に問題なのは，HEV モデルで想定する選択肢間の異分散性は，本来は選択肢の確率項間の相関と識別できないという事である。

離散選択モデルの効用は相対的な大小しか意味を持たないため，本来的には選択肢間の効用の

差しか推定することが出来ない。MNP モデルでは、選択肢の一つを基準として、その他の選択肢の相対的な値を求め、確率項の相対値の多重正規分布を GHK 等の数値シミュレーションによって計算することが多い。この時、確率項の相対値の分散共分散行列は、選択肢の確率項が異分散の場合と等分散で相関を持つ場合で同じ形式となるため識別できない (Dansie 1985, Walker et al. 2007)。したがって、ガンベル分布を仮定した HEV モデルで NL モデルよりも最終尤度が向上したからといって、それは分布形が正規分布からずれているために過ぎず、確率項に相関があるのか異分散なのかは明らかでない (Munizaga et al. 2000)。

2.4 MMNL モデル

MNL モデルに別の確率項を追加する形で IIA 特性を緩和したモデルが MMNL モデルである。同一の確率項を複数の選択肢に追加した場合に選択肢間の相関を表し、一つの選択肢に追加した場合は異分散性を表現することが可能である。いくつもの確率項を導入することで様々な相関や異分散性が考慮可能である。もちろん、前述のように、異分散性と相関の識別やその他の識別可能性も十分に考慮したモデルの構築が必要となる。

さらに、確率項を追加することでオープンフォームとなるため、選択確率の数値積分が不可欠である。MMNL モデルでは、積分範囲からシミュレーションによっていくつもの点を抽出し、各点での選択確率を平均する MSL 推定が主に用いられる。ここで、各点の抽出には疑似乱数法、Halton 数列等の数列を用いる方法、それらのハイブリッド法などが存在し、より効率的な数列やアルゴリズムの開発が進められている。ただし、MNP モデルと GHK 法を組み合わせた場合と比較して必ずしも計算効率が良いとは言えない。

2.5 Bayes 推定

最尤推定と並立する推定法として、以前より Bayes 推定が存在していたが、マルコフ連鎖モンテカルロ法による事後分布の計算法の発達等により、離散選択モデルの推定においても Bayes 推定が用いられるようになってきている。ここで、Bayes 推定と最尤推定では、その背後にある考え

方が異なるが、離散選択モデルへの適用に際して実用上の問題はない。特に、MMNL モデル等の多変量の分布を持つモデル推定には威力を発揮するが、MMNL モデルに限らずあらゆるモデルへの適用が可能である。

Bayes 推定の利点として、識別可能性に関する点が挙げられる。本来は識別が不可能なモデルやパラメータ間に一次従属性が存在する場合、通常最尤推定では収束計算が収束せず、原因が分からないままの場合も多い。一方で、Bayes 推定では、同定できないパラメータはフラットな事後分布として推定され、一次従属性が推定結果から確認可能である (Brownstone 2001)。

2.6 MACML 推定

オープンフォームのモデル推定には、MSL 推定か Bayes 推定かによらず、シミュレーションによる誤差が含まれる。この誤差を減少させるためにはシミュレーションを繰り返す必要があり、計算負荷は増加する。それに対して、近年、多変量の分布を複数の条件付き分布の積で近似する MACML 推定が提案されている。MACML 推定は MSL 推定と比較して計算効率が非常に高いとされており、今後は多変量の分布を持つモデル推定の主流になる可能性を持っている。MACML 推定は MNP モデルを対象としているため、今後は MNP モデルの適用が増えることも考えられる。

3. 個人間異質性の表現

3.1 ランダム係数モデル

2 章では、確率項の選択肢間の相関や異分散についてモデルを見てきたが、個人間で確定項の説明変数の係数の大きさが異なることを仮定したランダム係数モデルも用いられるようになってきている。従来は、意思決定者の属性毎に別の係数を設定することで個人間異質性を表現していたが、意思決定者の属性によらない非観測異質性を考慮するために、係数が確率分布に従うと仮定したのがランダム係数モデルである。

通常は確率分布として正規分布を仮定することが多く、MNL モデルにランダム係数を導入すると MMNL モデルになるが、MNP モデルにランダ

ム係数を導入しても，正規分布と正規分布の和はやはり正規分布であるため MNP モデルに帰着する。いずれの場合も MSL 推定や MACML 推定などを用いることとなる。

3.2 時間価値の異質性

離散選択モデルのアウトプットとして重要なものに時間価値がある。時間価値は交通施設整備の便益評価等にも用いられる重要な値であり，離散選択モデルの推定結果の妥当性を検討する際にも時間価値を計算した値を確認することが多い。ランダム係数モデルを用いた場合，時間価値も分布を持つこととなる。この際，通常のようにランダム係数の分布として正規分布を仮定すると時間価値の正負が固定されず，実用上の問題が生じる。そこで，正規分布の代わりに切断正規分布や対数正規分布，三角分布，Johnson's S_B 分布等の正負を固定可能な分布が適用されることもある (Train & Sonnier 2004)。また，MNP モデルとの親和性の高さから，非対称正規分布も提案されている (Bhat & Sidharthan 2012)。さらには分布形を仮定しないノンパラメトリック推定も用いられている (Fosgerau 2006)。

3.3 確率項の個人間異分散性

個人間非観測異質性を表現する方法として，ランダム係数モデルの他に，確率項の個人間異分散性を考慮したモデルも提案されている。しかしながら，2.3 での議論と同様に，ランダム係数と確率項の個人間異分散性は識別不可能である。なぜなら，効用は直接観測出来ないため，通常は，確率項の大きさを固定することで，その他の係数を同定可能としている。したがって，係数の大きさは，確率項の大きさに対する相対的な値に過ぎない。すなわち，個人間の異質性を考える上で，確率項の分散を大きく（小さく）することと，係数の大きさを小さく（大きく）することは同じである (Hess & Rose 2012)。このことは，推定されたモデルの解釈においても十分に気を付ける必要がある。

4. 複雑な選択肢集合への対応

4.1 選択肢別抽出

分析データを収集する際に，あまり選択されないう選択肢や分析上で着目している選択肢を選択したケースを他より高い割合で抽出する場合がある。このような場合，これまでは WESML 推定が用いられてきたが，近年，WCML 推定が提案されている。WCML 推定は WESML 推定と異なり，母集団の選択割合に関する情報がなくても推定可能という利点がある。また，選択肢集合に含まれる選択肢が多数の場合などに行われる推定時の選択肢のサンプリングにも対応可能とされている。

4.2 選択肢のサンプリング

選択肢のサンプリングは選択肢集合に含まれる選択肢が多数の場合に非常に有効である。立地選択モデルや目的地選択モデル，経路選択モデルなどでは選択肢が膨大になることも多く，全ての選択肢に関する属性値を収集することは困難な場合も多い。選択肢のサンプリングが許されるなら，データ収集に要するコストを削減可能である。

経路選択モデルに用いられる PSL モデルでは，EPS によりサンプリングされた選択肢から母集団の path-size を求める方法が提案されている。同様に，NL モデルにおいても，ELS により母集団のログサムを求める方法が提案されている。さらに，Guevara and Ben-Akiva (2010)では GEV モデル一般に適用可能な推定法が提案されている。

4.3 選択肢集合形成モデル

離散選択モデルでは，あたかも選択肢集合が自明であるかのように設定し，設定された選択肢集合からの選択をモデル化することが多い。しかしながら，意思決定者の選択肢集合は常に自明ではなく，誤った選択肢集合を仮定するとモデルのパラメータ推定にバイアスを生じたり，モデルを用いた予測が不正確になる可能性がある。特に，経路選択や目的地選択等，選択肢集合が膨大な場合に全ての選択肢の属性を把握することは分析者だけでなく意思決定者にとっても困難であり，全ての選択肢からの選択を仮定することは無理がある。

選択肢集合形成モデルは各選択肢が選択肢集合に含まれるか否かをモデル化するものであり，現実的な選択肢集合をもたらす。

5. 離散連続選択モデルへの拡張

離散選択モデルはその名の通り、離散的な選択肢集合からの選択を表すモデルであるが、車種選択と走行距離の分析や活動選択と活動時間の分析など、単数あるいは複数の選択肢を選ぶとともに、それぞれの選択肢に関する連続量の選択を表現するモデルとして、離散連続選択モデルが開発されている。従来は、誤差項に正規分布を仮定したオープンフォームの尤度関数が用いられることも多かったが、近年、誤差項にガンベル分布を仮定することでクローズドフォームを導く MDCEV モデルが開発されている。MDCEV モデルは単数の選択肢を選ぶ際に、MNL モデルと同形になるため、MNL モデルの拡張ということも可能である。

MDCEV モデルは MNL モデルの IIA 特性と同様に限界代替率が相互に独立という制約がある。この制約を緩和したのが GMDCEV モデルである。これは MNL モデルの IIA 特性を NL モデルで緩和したのと同様である。

6. 今後の課題

6.1 過剰なモデル化

離散選択モデルの選択肢間の相関に関しては、ここで述べてきたように、多くの柔軟なモデルが利用可能となっており、効率的な推定法も開発されているため、分析者側の自由度が高くなっている。さらに、個人間の非観測異質性もランダム係数モデルにより自由に表現可能である。しかしながら、識別可能性などに注意し、過剰なモデル化は避けなければならない。過剰なモデルは推定計算が収束しないか、収束したとしても計算時間が必要以上に長くなる。また、推定結果の解釈も困難になる。特に、それを考慮しない場合の推定結果に比べて最終尤度が向上したとしても、それは確率分布の自由度が高かったからに過ぎず、モデルの説明力は変わらないということもある。当然のことながら、分析対象を良く見て、何が卓越した問題なのかを判断することがより重要である。

6.2 データの精度

確率項には属性の観測誤差も含まれるため、属

性の観測精度を向上させれば確率項は小さくなり、モデルの説明力は向上する。モデルの構築に際して、既存のデータを用いる場合、データの精度に気を付ける必要がある。パーソントリップ調査等のデータはサンプル数が大きいため有用であるが、端末移動時間や目的地の位置など時空間の解像度は粗く、デマンドバスやコミュニティバイクなど短距離交通手段の評価を行うには十分な精度を持っていない。過去の行動を分析したい場合や調査を実施する時間がない場合などはデータの精度を考慮したモデル化を考える必要がある。選択確率と位置情報の取得確率を明確に意識したパラメータ推定も試みられている (Bierlaire & Frejinger 2008)。もちろん、新たにデータを収集することは重要であり、現在では GPS の利用により調査における時空間解像度は飛躍的に高められるため、目的に応じた GPS の活用は有用である。

データの精度の問題は SP 調査にも当てはまる。SP 調査では、分析者が選択状況を任意に設定できるため、モデルの推定精度が高くなるような設定を行うことが可能である。従来は実験計画法に基づいた設定が主流であったが、近年では、パラメータの推定誤差の分散共分散行列の行列式である D-error 指標を用いて、より直接的に推定精度を向上させる選択状況設定が可能となっている (Rose & Bliemer 2008)。

もう一つ、これまでデータと言えば標本抽出サンプルであったが、公共交通 IC カードや ETC カードの普及は母集団データの利用可能性を示唆している。ただし、これらのデータは推定の為の完全なデータではない。選択時の天候や列車の遅れなど選択肢の属性や周辺の状況を全時間帯に渡って記録し、選択データとマッチングさせる必要がある。実際には、分析しようと思った時には過去の状況は不明確で困ってしまうことも多い。

参 考 文 献

- Albert, J. and Chib, S. (1993). Bayesian analysis of binary and polychotomous response data. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 669-679.
- Ben-Akiva, M. (1973). Structure of passenger travel demand models. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- Ben-Akiva, M. and Bierlaire, M. (1999). Discrete choice methods and their applications to short-term travel decisions. In R. Hall (Ed.), *Handbook of Transportation Science*, 5-34, Kluwer.
- Bhat, C.R. (1995). A heteroskedastic extreme value model of intercity travel mode choice. *Transportation Research Part B*, 29, 471-483.
- Bhat, C.R. (2005). A multiple discrete-continuous extreme value model: formulation and application to discretionary time-use decisions. *Transportation Research Part B*, 39, 679-707.
- Bhat, C.R. (2011). The maximum approximate composite marginal likelihood (MACML) estimation of multinomial probit-based unordered response choice models. *Transportation Research Part B*, 45, 923-939.
- Bhat, C.R. and Sidharthan, R. (2012). New approach to specify and estimate nonnormally mixed multinomial probit models, Presented at 91st Annual Meeting of Transportation Research Board (forthcoming to Transportation Research Part B).
- Bhat, C.R. and Pinjari, A.R. (2010). The generalized multiple discrete-continuous extreme value (GMDCEV) model: allowing for non-additively separable and flexible utility forms. Technical paper, Department of Civil, Architectural & Environmental Engineering, The University of Texas at Austin.
- Bierlaire, M. and Frejinger, E. (2008). Route choice modeling with network-free data. *Transportation Research Part C*, 16, 187-198.
- Bierlaire, M., Bolduc, D. and McFadden, D. (2008). The estimation of generalized extreme value models from choice-based samples. *Transportation Research Part B*, 42, 381-394.
- Brownstone, D. (2001). Discrete choice modeling for transportation. In D. Hensher (Ed.), *Travel Behaviour Research: The Leading Edge*. Amsterdam, Pergamon, 97-124.
- Cascetta, E., A. Nuzzolo, F. Russo and A. Vitetta (1996) A modified logit route choice model overcoming path overlapping problems. specification and some calibration results for interurban networks. In J.B. Lesort (Ed.), *Transportation and Traffic Theory: Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*. Pergamon, 697-711.
- Chu, C. (1981). Structural issues and sources of bias in residential location and travel choice models. PhD Thesis, Northwestern University.
- Chu, C. (1989). A paired combinational logit model for travel demand analysis. *Proceedings of Fifth World Conference on Transportation Research*, 4, 295-309.
- Daly, A. and Bierlaire, M. (2006). A general and operational representation of generalised extreme value models. *Transportation Research Part B*, 40, 285-305.
- Dansie, B.R. (1985). Parameter estimability in the multinomial probit model. *Transportation Research Part B*, 19, 526-528.
- Fosgerau, M. (2006). Investigating the distribution of the value of travel time savings. *Transportation Research Part B*, 40, 688-707.
- Frejinger, E., Bierlaire, M. and Ben-Akiva, M. (2009). Sampling of alternatives for route choice modeling. *Transportation Research Part B*, 43, 984-994.
- Gourieroux, C. and Monfort, A. (1993). Simulation-based inference: a survey with special reference to panel data models. *Journal of Econometrics*, 59, 5-33.
- Guevara, C.A. and Ben-Akiva, M. (2010). Sampling of alternatives in multivariate extreme value (MEV) models, *Selected Proceedings of 12th WCTR*. Edited by Manuel, J. and Macário, R., 2010.
- Hess, S. and Rose, J.M. (2012). Can scale and coefficient heterogeneity be separated in random coefficients models? *Compendium DVD of 91st Annual Meeting of the Transportation Research Board*, Washington D.C.
- Lee, B.H.Y. and Waddell, P. (2010). Residential mobility and location choice: a nested logit model with sampling of alternatives. *Transportation*, 37, 587-601.
- Luce, D. (1959). *Individual Choice Behavior*. John Wiley and Sons, New York.
- Manski, C. and Lerman, S. (1977). The estimation of choice probabilities from choice based samples. *Econometrica*, 45, 1977-1988.
- McFadden, D. (1978). Modeling the choice of residential location. In A. Karlqvist, L. Lundqvist, F. Snickars, and J. Weibull (Eds.), *Spatial Interaction Theory and Planning Models*, North-Holland, Amsterdam, 75-96.
- McFadden, D. and Train, K. (2000). Mixed MNL models of discrete response. *Journal of Applied Econometrics*, 15, 447-470.
- Munizaga, M.A., Heydecker, B.G. and Ortúzar, J.de D. (2000) Representation of heteroskedasticity in discrete choice models. *Transportation Research Part B*, 34, 219-240.
- Rose, J.M. and Bliemer, M.C.J. (2008). Stated preference experimental design strategies, In D.A. Hensher and K. Button (Eds.), *Handbook of Transport Modelling*, 2nd ed., Elsevier, Amsterdam, 151-179.
- Small, K. (1987). A discrete choice model for ordered alternatives. *Econometrica*, 55, 409-424.
- Thurstone, L. (1927). A law of comparative judgement. *Psychological Review*, 34, 273-286.
- Train, K. and Sonnier, G. (2004). Mixed logit with bounded distributions of correlated partworths. In R. Scarpa and A. Alberini (Eds.), *Applications of Simulation Methods in Environmental and Resource Economics*, 117-134, Kluwer Academic Publishers.
- Vovsha, P. (1997). Application of cross-nested logit model to mode choice in Tel Aviv, Israel, metropolitan area. *Transportation Research Record*, 1607, 6-15.
- Walker, J.L., Ben-Akiva, M. and Bolduc, D. (2007). Identification of parameters in normal error component logit-mixture (NECLM) models. *Journal of Applied Econometrics*, 22, 1095-1125.
- Wen, C.-H. and Koppelman, F.S. (2001). The generalized nested logit model. *Transportation Research Part B*, 35, 627-641.
- 北村隆一，森川高行，佐々木邦明，藤井聡，山本俊行 (2002). *交通行動の分析とモデリング—理論/モデル/調査/応用—*，技法堂出版。